

# Die Rolle der Geometrie bei Navigationssystemen

HELLMUTH STACHEL (TU WIEN)

Wir haben uns alle schon längst daran gewöhnt, im Auto oder mittels Handy ein 'Navi' zu verwenden und uns damit zum gewünschten Ziel leiten zu lassen. Der folgende Beitrag soll zeigen, welche wichtige Rolle die Geometrie für die Navigationssysteme spielt. Geometrie wird bei der Berechnung der eigenen Position und dem Erkennen der in Sonderfällen auftretenden Unschärfen eingesetzt, aber natürlich auch bei der Routenberechnung mittels graphentheoretischer Algorithmen. Darüber hinaus hilft die Geometrie bei der Suche nach einer optimalen Verteilung der Navigationssatelliten und sogar beim Erkennen relativistischer Effekte bei der Distanzmessung.

## 1. Positionierung und Navigation

Seit dem Altertum bedeutete es eine große wissenschaftliche Herausforderung, sich auf dem Meer zurechtzufinden. Man konnte Winkel messen und orientierte sich nach Leuchttürmen, Sternen oder nach der Sonne. Mit Hilfe des Sextanten wurde der Erhebungswinkel der Sonne oder des Polarsternes gemessen und damit die geografische Breite der augenblicklichen Position ermittelt.

Die Bestimmung der geografischen Länge blieb hingegen lange Zeit hindurch ein unlösbares Problem. Erst im 18. Jahrhundert gelang dem englischen Uhrmacher John Harrison die Entwicklung einer see-tauglichen Uhr, womit dann auf See die lokale Mittagszeit mit der augenblicklichen Zeit im Heimat-hafen verglichen werden konnte. Dabei entsprechen je vier Minuten Zeitdifferenz einem Unterschied in der geografischen Länge von einem Grad. Harrison löste damit als erster eine 1714 in England aus-geschriebene und hoch dotierte Preisaufgabe. Den Preis erhielt er allerdings erst 1773 nach Überwindung zahlreicher Anfechtungen (Details dazu in Sobel (2003)).

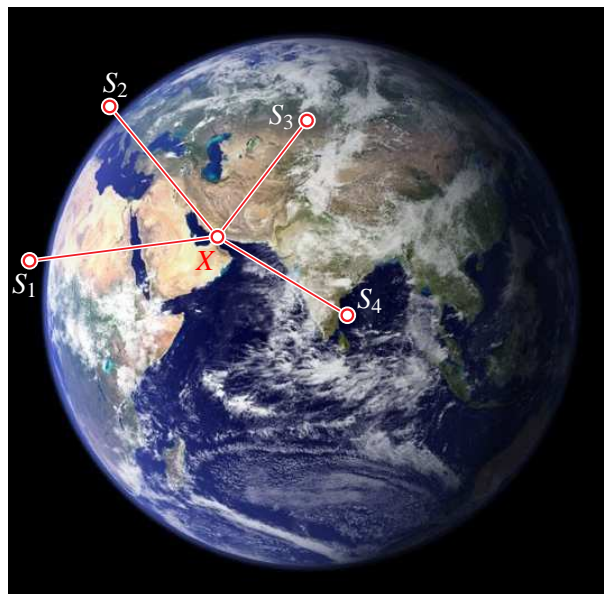


Abb. 1: Bei der Satellitennavigation wird aus den Distanzen zwischen dem Empfänger  $X$  und mindestens vier Satellitenpositionen  $S_1, S_2, \dots$  die genaue Position von  $X$  berechnet.

In der zweiten Hälfte des vergangenen Jahrhunderts wurde die Winkelmessung durch die Distanzmessung zu Satelliten abgelöst. Als Resultat eines höchst erfolgreichen Zusammenwirkens verschiedener Wissensgebiete wie Geodäsie, Informatik, Mathematik, Nachrichtentechnik, Physik und Raumfahrttech-

Der Autor dankt seinem geschätzten Kollegen Dr. Thomas Müller für wichtige Anregungen und Literaturhinweise.

nik gibt es derzeit vier globale *Satelliten-Navigationssysteme* (kurz: GNSS = global navigation satellite system).

1. **GPS** (Global Positioning System), USA
2. **GLONASS** (Globalnaja nawigazionaja sputnikowaja sistema)<sup>1</sup>, Russland
3. **BeiDou** 北斗 ('Großer Bär'), China
4. **Galileo**, Europäische Union, seit 2016; es ist dies das einzige zivile System.

Jedes 'Navi' (Zielführungssystem) erledigt zwei Aufgaben, die *Positionierung* und die *Navigation*. Es umfasst mindestens vier Komponenten:

- einen *GNSS-Empfänger* für ein oder mehrere Systeme,
- eine *digitalen Karte*,
- einen *Navigationscomputer* und
- ein Gerät zur *Eingabe und Anzeige*

sowie allenfalls noch unterstützende Sensoren wie etwa Radsensoren, die eine Positionierung auch in Tunnels ermöglichen.

## 2. Positionierung mittels Distanzen

Bei der Satellitennavigation wird die Position des Empfängers  $X$  aus den Distanzen zu mindestens vier Satellitenpositionen  $S_i, i = 1, 2, \dots$ , berechnet (Abb. 1). Dabei beruht die Distanzmessung auf einer hochpräzisen Zeitmessung.

Wir sind ja damit vertraut, Distanzen mit Hilfe der Laufzeit des Schalles zu messen, etwa dann, wenn wir die Entfernung eines nahenden Gewitters abschätzen wollen und nach einem Blitz zu zählen beginnen, bis wir den Donner hören. Die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft beträgt bei einer Temperatur von  $20^\circ$  etwa  $0,340 \text{ km/s}$  (Mach  $1 = 1224 \text{ km/h}$ ). Bei der Satellitennavigation verwendet man jedoch die Laufzeit von Funksignalen, die sich bekanntlich mit der Geschwindigkeit  $c = 300.000 \text{ km/s}$  ausbreiten. Das ist fast paradox, denn wir sehen im täglichen Leben die Zeitansage über den Rundfunk als verbindlich an, und Funkuhren gelten als höchst präzise. Dabei benötigt ein Funksignal z.B. für die rund  $400 \text{ km}$  von Wien nach Innsbruck immerhin etwa  $0,0013 \text{ s}$ . Noch extremer, das TV-Signal von Wien über Astra (ca.  $36.000 \text{ km}$  über dem Äquator) und zurück benötigt rund  $0,5 \text{ s}$  !

### 2.1. Bipolare Koordinaten

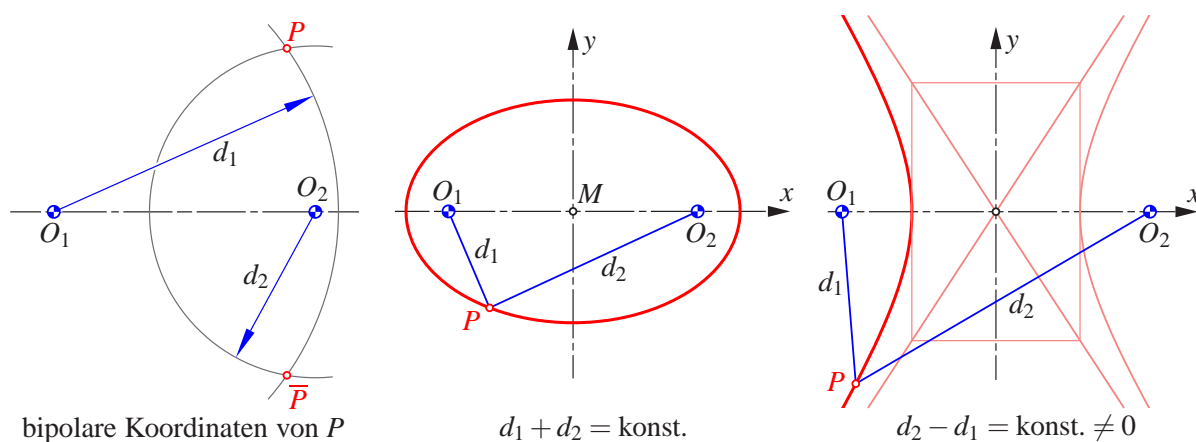


Abb. 2: Die Distanzen  $d_1 = \overline{O_1P}$  und  $d_2 = \overline{O_2P}$  bilden nach Schoenflies (2014) die bipolaren Koordinaten des Punktes  $P$  bezüglich der Basis  $O_1O_2$ .

<sup>1</sup> ГЛОНАСС = Глобальная навигационная спутниковая система

Zunächst ein kurzer Blick zur Geometrie der Distanzkoordinaten in der Ebene und im Raum:  
 Gegeben seien in der Ebene die beiden Punkte  $O_1$  und  $O_2 (\neq O_1)$ . Dann bilden für jeden Punkt  $P$  der Ebene die beide Distanzen  $d_i = \overline{O_i P}$ ,  $i = 1, 2$ , nach Schoenflies (2014) die *bipolare Koordinaten*<sup>2</sup>  $(d_1, d_2)$  von  $P$  bezüglich der Basis  $O_1 O_2$ .

Umgekehrt gibt es zu einem Paar  $(d_1, d_2)$  bei  $d_1 + d_2 > \overline{O_1 O_2}$  und  $|d_1 - d_2| < \overline{O_1 O_2}$  zwei bezüglich der Verbindungsgeraden  $O_1 O_2$  symmetrische Punkte  $P$  und  $\bar{P}$ , für welche  $(d_1, d_2)$  die bipolaren Koordinaten sind (Abb. 2, links). Ist hingegen eine der obigen Ungleichungen eine Gleichung, so ist  $P$  eindeutig und auf der Verbindungsgeraden  $O_1 O_2$  gelegen.

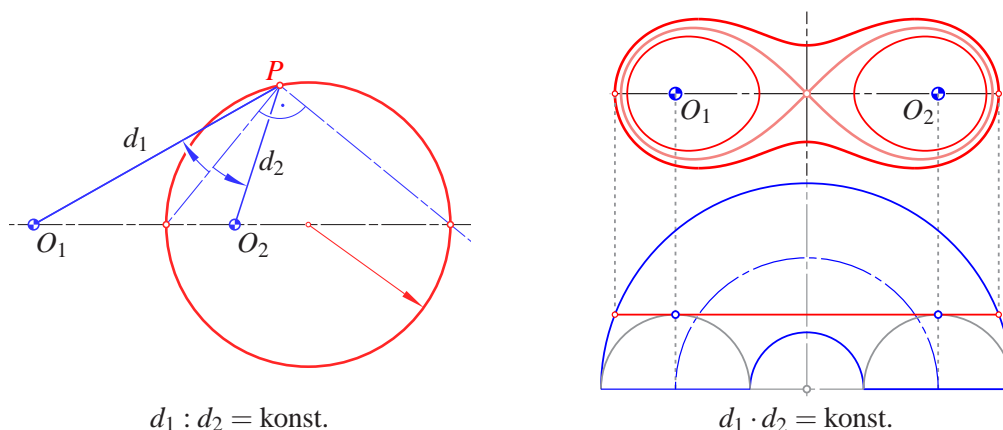


Abb. 3: Für Punkte des *Kreises von Apollonius* ist der Quotient, für Punkte einer *Cassinischen Kurve* das Produkt der bipolaren Koordinaten konstant.

Abb. 3 zeigt links den Kreis des Apollonius<sup>3</sup> als Ort der Punkte, deren bipolare Koordinaten zueinander proportional sind. Die Kurven in Abb. 3 rechts sind *Cassinische Kurven*<sup>4</sup>. Ihre Punkte sind durch ein jeweils konstantes Produkt der bipolaren Koordinaten gekennzeichnet. Die *Bernoullische Lemniskate* ist eine spezielle Cassinische Kurve, und zwar bei  $4d_1 \cdot d_2 = \overline{O_1 O_2}^2$ .

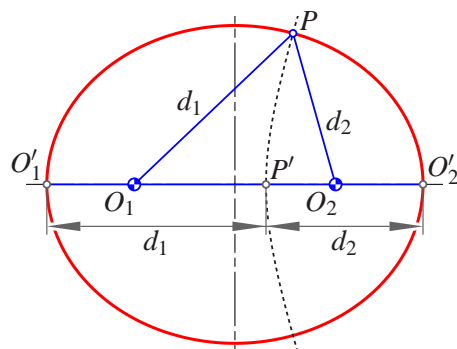


Abb. 4: Zweidimensionale Version der Jacobischen Fokaleigenschaft.

Das räumliche Analogon zu bipolaren Punktkoordinaten sind *tripolare Koordinaten*. Jene des Punktes  $P$  werden nach Vorgabe eines Basisdreiecks  $O_1 O_2 O_3$  von den drei Distanzen  $d_i = \overline{P O_i}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , gebildet. Zwei Punkte, die bezüglich der Basisebene, also der Verbindungsebene  $O_1 O_2 O_3$ , symmetrisch liegen, haben natürlich dieselben tripolaren Koordinaten.

Umgekehrt existiert nicht zu allen Koordinatentripeln  $(d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$  ein Punkt. Notwendig und hinreichend für Punkte außerhalb der Basisebene  $O_1 O_2 O_3$  sind nach Izumi (2016) die vier Ungleichungen,

<sup>2</sup> Im Englischen findet man auch die Bezeichnung *two-center bipolar coordinates*.

<sup>3</sup> nach Apollonius von Perga (in der heutigen Provinz Antalya gelegen), 262 – 190 v. Chr.

<sup>4</sup> nach Giovanni Domenico Cassini (1625 – 1712), italienischer Mathematiker und Astronom.

welche die Flächeninhalte  $F_{\dots}$  der aus den vier Punkten  $\{P, O_1, O_2, O_3\}$  auswählbaren Dreiecke betreffen, und zwar

$$F_{\Delta O_1 O_2 O_3} < F_{\Delta P O_1 O_2} + F_{\Delta P O_2 O_3} + F_{\Delta P O_3 O_1}, \quad F_{\Delta P O_1 O_2} < F_{\Delta O_1 O_2 O_3} + F_{\Delta P O_2 O_3} + F_{\Delta P O_3 O_1}, \dots$$

Die tripolaren Koordinaten der in der Basisebene gelegenen Punkte  $P$  erfüllen eine algebraische Gleichung. Man erhält diese, wenn man das Volumen des nun ‘flachen’ Tetraeders  $PO_1O_2O_3$  gleich Null setzt und dabei das Volumen durch die Cayley-Mengersche Determinante ausdrückt (siehe Arens-et-al. (2013), S. 491).

Als Beispiel einer geometrischen Aussage, welche von tripolaren Punktkoordinaten handelt, zitieren wir die *Jacobische Fokaleigenschaft*<sup>5</sup> der Flächen zweiten Grades (siehe Staude (1915), S. 204): Ort der Raumpunkte  $P$ , deren tripolare Koordinaten bzgl. einer gegebenen Basis  $(O_1, O_2, O_3)$  gleich sind den Entfernungen  $d_i = \overline{O'_i P'}$  der Ecken eines gegebenen Dreiecks  $O'_1 O'_2 O'_3$  von einem in der Dreiecksebene gelegenen Punkt  $P'$ , ist eine Fläche zweiten Grades. In Abb. 4 wird ein zweidimensionales Analogon gezeigt.

### 3. Distanzen zu Satellitenpositionen

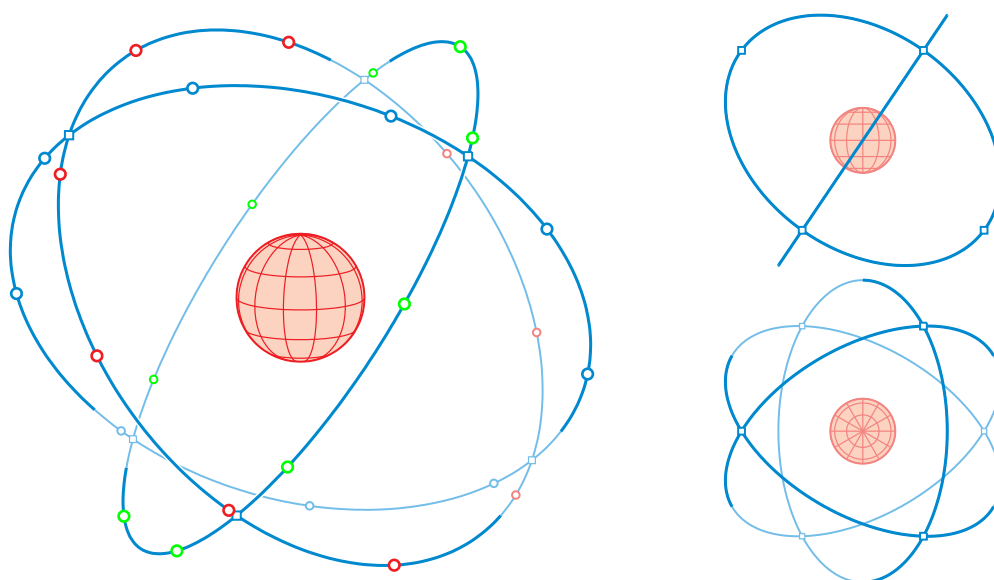


Abb. 5: Verteilung der im Endausbau 30 Satelliten zu Galileo, rechts in Grund- und Aufriss.

Das europäische Satelliten-Navigationssystem Galileo weist derzeit 18 Satelliten auf. Im Endausbau werden es 30 sein, und zwar je 9 (+1 in Reserve) verteilt auf drei Bahnebenen, deren Neigungswinkel gegenüber dem Äquator  $56^\circ$  betragen (Abb. 5). Jeder Satellit läuft auf einer nahezu kreisförmigen Kepler-Bahn (vgl. Glaeser-Stachel-Odehnal (2016), S. 62–76) in rund 23.260 km Höhe über der Erde. Die Umlaufzeit der Satelliten beträgt  $\sim 14$  h, was eine Bahngeschwindigkeit von rund 3.700 m/s (13.340 km/h, also  $\sim$  Mach 11) ergibt. Und unter diesen Bahnen dreht sich die Erde<sup>6</sup>. Daher wiederholt sich eine Satellitenkonfiguration relativ zur Erde nach rund 7 Tagen, bzw. nach  $(7 \cdot 24)/14 = 12$  Umläufen. Diese Verteilung der Satelliten bewirkt, dass überall auf der Erde — außer in Polnähe — 6 bis 8 Satelliten von Galileo sichtbar sind.

Ähnliche Verteilungen gibt es bei den anderen Navigationssystemen, nämlich

- GPS: 6 Bahnebenen mit je  $55^\circ$  Neigung, Bahnhöhe 20.180 km sowie 11 h, 58 min Umlaufzeit (vgl. Glaeser (2015), S. 33);

<sup>5</sup> Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), deutscher Mathematiker in Königsberg und Berlin.

<sup>6</sup> Die Navigationssatelliten sind also keinesfalls geostationär, wie gar nicht so selten behauptet wird, sondern relativ zur Erde sogar sehr schnell unterwegs.

- GLONASS: 3 Bahnebenen mit  $64.1^\circ$  Neigung, Bahnhöhe 19.140 km und 11 h, 15 min Umlaufzeit.

Eine größere Bahnhöhe ermöglicht eine größere Reichweite bei günstigerem Einfallswinkel der Funksignale. Allerdings nimmt die gefährliche Strahlung zu, die Transportkosten für die jeweils rund 750 kg schweren Satelliten<sup>7</sup> werden höher, und die auf der Erde empfangenen Signale werden schwächer. Eine Verteilung auf mehr Bahnebenen erhöht die Anzahl möglicher Kollisionsstellen, nachdem sich je zwei Bahnkreise bei gleicher Bahnhöhe in zwei bzgl. der Erdmitte symmetrischen Punkten treffen. In Abb. 5 sind diese Schnittpunkte durch kleine Quadrate markiert.

Die vorhin angegebenen Bahndaten und auch die berechneten Empfängerkoordinaten beziehen sich auf die im WGS 84 (World Geodetic System) festgelegte Approximation der Erde durch ein Drehellipsoid mit den Halbachsen  $a = 6378.137$  km und  $b = 6356.752$  km. Das Geoid, also die zu den Gravitationsrichtungen orthogonale Fläche, weicht übrigens bis zu  $\pm 100$  m von diesem Ellipsoid ab.

Wie ist nun eine hochpräzise Distanzmessung zwischen dem Empfänger  $X$  auf der Erde und den sich sehr schnell bewegendem Satelliten überhaupt möglich?

Bei Galileo führt jeder Satellit 4 Atomuhren mit sich, die jeweils auf  $1 \cdot 10^{-10}$  s genau sind. Das bedeutet, 1 Takt Laufzeit entspricht einem Weg des Funksignals von 3 cm. Die Uhren in den üblichen Empfangsgeräten erreichen nur 1 % dieser Genauigkeit, weshalb die Distanzen nur bis auf rund 3 m genau sind.

Bodenstationen informieren alle Satelliten laufend über deren genauen Bahndaten und Zeitkorrekturen. Umgekehrt senden die Satelliten laufend ihre aktuellen Daten. Dabei umfasst jede Navigationsmitteilung neben der Kennung des Satelliten eine Zeitangabe und die aktuellen Korrekturen für die Zeitmessung und die Bahndaten. Aus der Zeit und den Bahndaten gewinnt das Empfangsgerät die augenblickliche Position  $S_i$  des Satelliten (vgl. Glaeser-Stachel-Odehnal (2016), S. 72). Wenn ein Satellit in der Position  $S_i$  mit dem Koordinatenvektor  $\mathbf{s}_i$  die Zeitansage "8:00 Uhr" funkt und diese den Empfänger  $X$  (Ortsvektor  $\mathbf{x}$ ) nach dessen Uhr mit der Verzögerung  $t_i$  erreicht, also um  $8:00 + t_i$ , dann ergibt die Multiplikation mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  als *scheinbare Distanz*

$$\tilde{d}_i = ct_i.$$

Warum ist das 'nur' die scheinbare Distanz? Die Atomuhren in allen Satelliten sind untereinander sehr genau synchronisiert. Bei den Empfängeruhren ist dies technisch nicht möglich. Geht eine Empfängeruhr um  $t_0$  vor, so erscheinen alle Distanzen um dasselbe  $d_0 = ct_0$  vergrößert. Deshalb lautet die *wahre Distanz*

$$d_i = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{x}\| = \tilde{d}_i - d_0.$$

Angenommen, es sind die Ortsvektoren  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_4$  von vier Satellitenpositionen bekannt sowie die scheinbaren Distanzen  $\tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_4$ . Unbekannt sind hingegen die im Ortsvektor  $\mathbf{x}$  zusammengefassten 3 Raumkoordinaten des Empfängers  $X$  und der durch mangelnde Synchronisation der Empfängeruhr entstandene Distanzfehler  $d_0 \lesseqgtr 0$ . Dies führt auf ein System von vier nichtlinearen Gleichungen, nämlich

$$\|\mathbf{s}_i - \mathbf{x}\| = \tilde{d}_i - d_0 \quad \text{für } i = 1, \dots, 4. \quad (1)$$

### 3.1. Eine geometrische Interpretation

Wir wollen die Bedingungen (1) zunächst geometrisch deuten. Dabei beginnen wir mit dem zweidimensionalen Analogon: Wählen wir  $S_i$  für  $i = 1, 2, 3$  als Zentrum eines Kreises mit dem Radius  $\tilde{d}_i$  und die Empfängerposition  $X$  als Zentrum eines Kreises mit dem Radius  $d_0$ , so werden die beiden Kreise bei  $d_0 < 0$  von außen, bei  $d_0 > 0$  von innen *berühren* (siehe Abb. 6). Denken wir uns Kreise mit einem positiven oder negativen Durchlaufungssinn versehen, je nachdem, ob der Radius positiv angegeben ist oder negativ, so liegt in den genannten Fällen eine gleichsinnige Berührung vor, d.h. im Berührungspunkt stimmen die Durchlaufungssinne der beteiligten Kreise überein.

<sup>7</sup> Übrigens ist die Lebensdauer der Navigationssatelliten mit 5 bis 10 Jahren eher kurz, und zwar wegen der begrenzten Lebensdauer der Akkus. Letztere sind immer dann notwendig, wenn sich der Satellit im Schatten der Erde befindet.

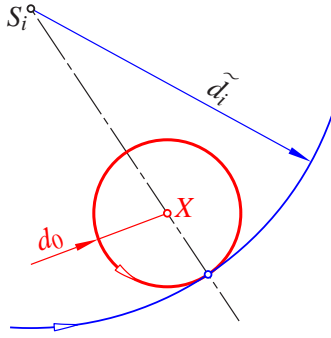


Abb. 6: Orientierte Berührung.

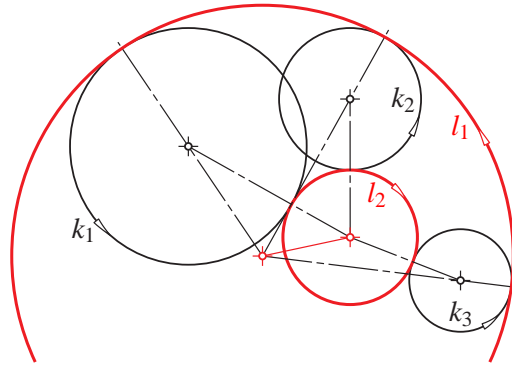


Abb. 7: Apollonisches Berührproblem in der Ebene.

Damit zeigt sich, dass unsere Aufgabe im zweidimensionalen Fall äquivalent ist zu einem klassischen geometrischen Problem, dem *Apollonischen Berührproblem*: Gesucht ist ein Kreis  $(X, d_0)$ , welcher drei gegebene Kreise  $k_i = (S_i, \tilde{d}_i)$  gleichartig berührt, d.h., alle von außen oder alle von innen. Diese Aufgabe ist bekanntlich mit Zirkel und Lineal exakt lösbar, und es gibt im Fall orientierter Kreise bis zu zwei reelle Lösungen (beachte  $l_1$  und  $l_2$  in Abb. 7). Drei nicht-orientierte Kreise können auf  $2^3 = 8$  verschiedene Arten mit einem Durchlaufungssinn versehen werden, wobei komplementäre Orientierungen komplementäre Lösungen ergeben. Deshalb gibt es im nicht-orientierten Fall bis zu acht reelle Lösungen.

Auf den Raum übertragen bedeutet dies: Die gesuchte Empfängerposition  $X$  ist das Zentrum einer Kugel, welche vier gegebene Kugeln  $(S_i, \tilde{d}_i)$  gleichartig berührt.

### 3.2. Analytische Positionsbestimmung

Die vier Unbekannten in dem Gleichungssystem (1), also die Koordinaten von  $\mathbf{x}$  zusammen mit  $d_0$ , müssen nach Quadrierung der einzelnen Gleichungen die vier quadratische Gleichungen

$$Q_i(\mathbf{x}, d_0) = (\mathbf{s}_i - \mathbf{x})^2 - (\tilde{d}_i - d_0)^2 = 0, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (2)$$

lösen, also ausführlich

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2(\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{x}) + \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_i - d_0^2 + 2\tilde{d}_i d_0 - \tilde{d}_i^2 = 0. \quad (3)$$

Die Differenz je zweier Gleichungen ist linear in den vier Unbekannten. Deshalb bleiben drei lineare und eine quadratische Gleichung, was die behauptete Maximalzahl 2 an reellen Lösungen bestätigt.

Die Positionsbestimmung wird wiederholt durchgeführt. Dabei stellt die Lösung  $\mathbf{x}^*$  und  $d_0^*$  zu den vorhergegangenen Satellitenpositionen  $\mathbf{s}_i^*$  und Distanzen  $\tilde{d}_i^*$  zumeist eine gute Näherung für die Lösung zu den neuen Daten  $\mathbf{s}_i$  und  $\tilde{d}_i$  dar. Andererseits stehen meist mehr als vier Satelliten zur Verfügung. Deshalb wird bei der praktischen Berechnung meist iterativ vorgegangen:

Wir setzen  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{v}$  und  $d_0 = d_0^* + v_0$  und entwickeln die quadratischen Polynome  $Q_i(\mathbf{x}, d_0)$  an der Näherungslösung  $(\mathbf{x}^*, d_0^*)$  nach Taylor. Dies führt auf ein lineares System für die ‘Verbesserungen’  $\mathbf{v}$  und  $v_0$ , nämlich

$$\frac{1}{2} Q_i(\mathbf{x}^* + \mathbf{v}, d_0^* + v_0) \approx -(\mathbf{s}_i - \mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{v} + (\tilde{d}_i^* - d_0^*) v_0 = 0, \quad (4)$$

wobei zudem  $(\mathbf{s}_i^* - \mathbf{x}^*)^2 - (\tilde{d}_i^* - d_0^*)^2 = 0$ . Damit erhält man die Lösung schneller und hat kein Problem mit der Zweideutigkeit. Zudem gibt es Standardverfahren zur Bestimmung einer optimalen Lösung eines überbestimmten linearen Gleichungssystems (siehe Arens-et-al. (2013), S. 750–751). Ein solches liegt ja immer dann vor, wenn mehr als vier Satelliten zur Verfügung stehen. Aus dem Vektor  $\mathbf{v}$  lässt sich übrigens der Geschwindigkeitsvektor des Empfängers als skalares Vielfaches bestimmen.

### 3.3. Kritische Konfigurationen

Die numerische Berechnung des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  der Empfängerposition  $X$  wird ungenau, wenn die zwei Lösungen (des Apollonischen Raumproblems) nahe beieinanderliegen. Wir sprechen von einer *kritischen* (oder gefährlichen) Konfiguration, wenn diese überhaupt zusammenfallen. Wie ist eine kritische Konfiguration geometrisch zu kennzeichnen?

Durch die Subtraktion je zweier Gleichungen in (1) können wir die Unbekannte  $d_0$  eliminieren. Das bedeutet, dass im Empfänger die Differenz der Abstände von  $S_j$  und  $S_1$  für  $j = 2, 3, 4$  dem Betrag nach bereits aus den scheinbaren Distanzen bestimmbar ist, nämlich

$$\left| \| \mathbf{s}_j - \mathbf{x} \| - \| \mathbf{s}_1 - \mathbf{x} \| \right| = |\tilde{d}_j - \tilde{d}_1|.$$

Also liegt  $X$  auf insgesamt 3 zweischaligen Drehhyperboloiden  $\mathcal{H}_j$  mit den jeweiligen Brennpunkten  $S_j$  und  $S_1$ . In  $X$  fallen genau dann zwei Schnittpunkte zusammen, wenn die drei Drehhyperboloide  $\mathcal{H}_1$ ,  $\mathcal{H}_2$  und  $\mathcal{H}_3$  in  $X$  eine gemeinsame Gerade  $t$  berühren. Diese Gerade liegt dann in den drei Tangentialebenen  $\tau_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , von  $\mathcal{H}_j$  im Punkt  $X$  (siehe Abb. 8). Nun folgt aus den Fokaleigenschaften einer Hyperbel, dass die Tangentialebene  $\tau_j$  den Innenwinkel zwischen den Fokalgeraden  $XS_j$  und  $XS_1$  halbiert. Es geht demnach die in  $X$  beginnende Halbgerade  $XS_1$  durch Spiegelung an den durch  $t$  gehenden Tangentialebenen  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  und  $\tau_3$  der Reihe nach in die Halbgeraden  $XS_2$ ,  $XS_3$  und  $XS_4$  über. Diese Halbgeraden gehören demnach einem Drehkegel mit der Spitze  $X$  und der Drehachse  $t$  an (Abb. 9).

Es gilt aber auch die Umkehrung: Gibt es einen derartigen Drehkegel, so haben die drei genannten Tangentialebenen eine gemeinsame Gerade  $t$ , welche dann alle drei Drehhyperboloide in  $X$  berührt.

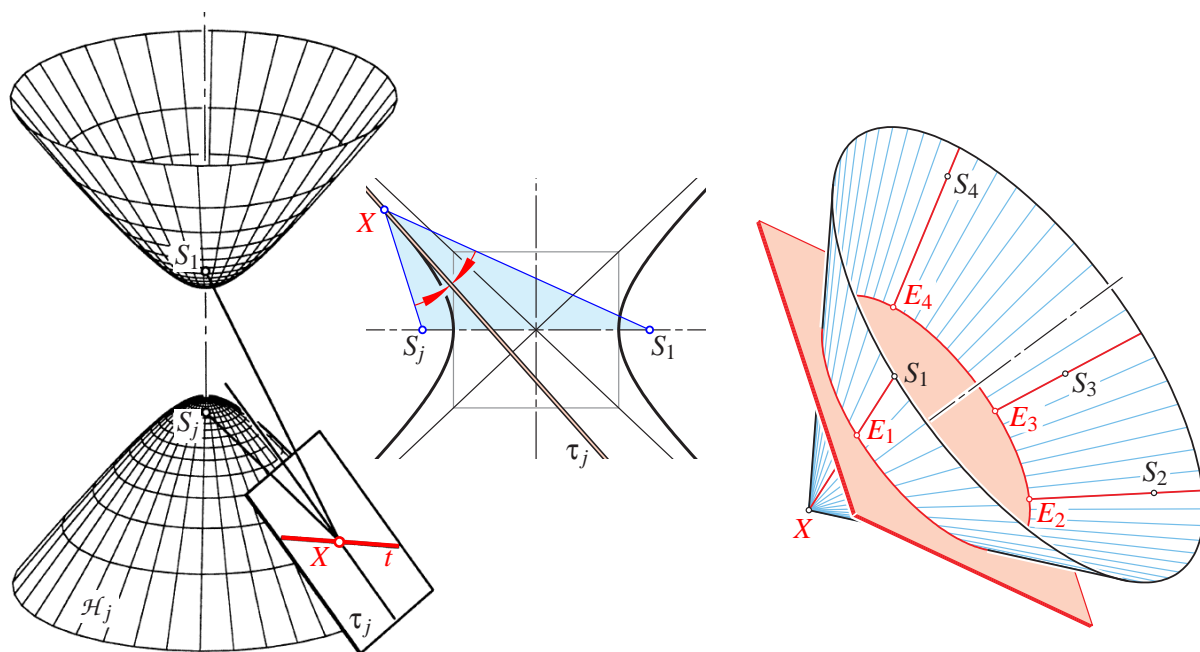


Abb. 8: Die Gerade  $t$  berührt das Drehhyperboloid  $\mathcal{H}_j$  in  $X$ .    Abb. 9: Diese Konfiguration ist kritisch.

**Satz 1** Die Konfiguration der Satellitenpositionen  $S_1, S_2, \dots$  zum Empfänger  $X$  ist genau dann kritisch, wenn  $S_1, S_2, \dots$  auf einem Drehkegel mit der Spitze  $X$  liegen, und zwar auf demselben von  $X$  begrenzten Halbkegel (Abb. 9).

Wir erhalten eine dazu äquivalente analytische Kennzeichnung, wenn wir die Verbindungsvektoren  $\overrightarrow{XS_i}$  zunächst zu Einheitsvektoren  $\overrightarrow{XE_i}$  normieren. Dann ist die obige Drehkegelbedingung genau dann erfüllt, wenn die Punkte  $E_1, E_2, \dots$  in einer gemeinsamen Ebene liegen und damit auf einem Kreis der Einheitskugel, wenn also im Falle von vier sichtbaren Satelliten bei

$$\mathbf{v}_i := \overrightarrow{XE_i} = \frac{1}{\|\mathbf{s}_i - \mathbf{x}\|} (\mathbf{s}_i - \mathbf{x}) \quad \text{für } i = 1, \dots, 4 \quad \Delta := \det(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1) = 0. \quad (5)$$

$\Delta$  ist übrigens gleich dem sechsfachen Volumen des Tetraeders  $E_1E_2E_3E_4$  und kommt in der Formel für *GDOP* (geometric dilution of precision) vor, eine Kennzahl für die Genauigkeit der Positionierung.

Es gibt aber noch eine Reihe anderer Ursachen, die die Genauigkeit der Satelliten-Navigation mindern.

- *Ionosphärenfehler*: In der Höhe zwischen 60 und 1000 km über der Erde wird das Funksignal abgebremst. Dabei hängt das Ausmaß der Verzögerung von der Signalfrequenz ab.
- *Ablenkungen an Gebäuden* können bewirken, dass ein Signal den Empfänger mehrfach erreicht und damit das System irritiert.
- *Relativistische Effekte*: Uhren in einem bewegten System scheinen sich vom Standpunkt des ruhenden Systems aus nach der speziellen Relativitätstheorie langsamer zu bewegen (Zeitdilatation). Nach der allgemeinen Relativitätstheorie beeinflusst auch die in Erdnähe zunehmende Gravitation die Relativität der Zeit. Beide Effekte können allerdings genau abgeschätzt und durch eine geeignete Justierung der Atomuhren aufgefangen werden.

#### 4. Navigation

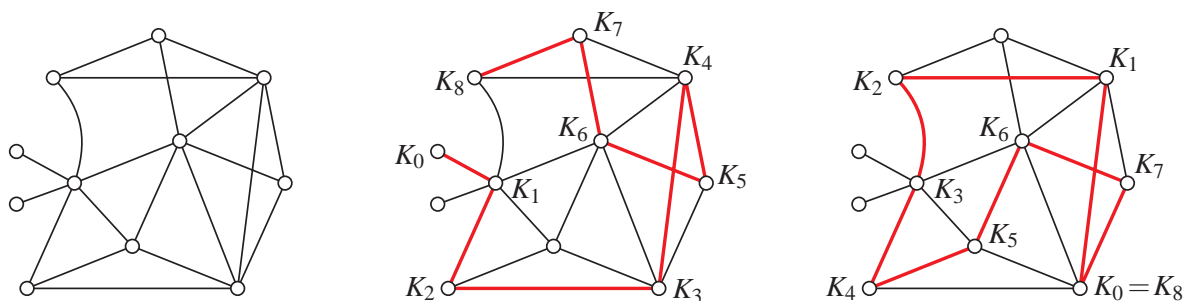


Abb. 10: Grundbegriffe der Graphentheorie: Graph (links), Weg (Mitte), Kreis (rechts).

Zunächst eine kurze Einführung die Begriffe der Graphentheorie (vgl. Arens-et-al. (2013)): Ein *Graph* umfasst eine *Knotenmenge*  $\mathcal{V}$  und eine *Kantenmenge*  $\mathcal{E} \subset \mathcal{V}^2$ , wobei jede Kante von zwei Knoten begrenzt ist (Abb. 10). Ein *Weg* (von  $K_0$  nach  $K_8$ ) ist eine aus Kanten bestehende Verbindung, die keinen Knoten öfter als einmal enthält. Ein *Kreis* ist eine aus Kanten zusammengesetzte geschlossene Verbindung, die keinen Knoten mehrfach enthält.

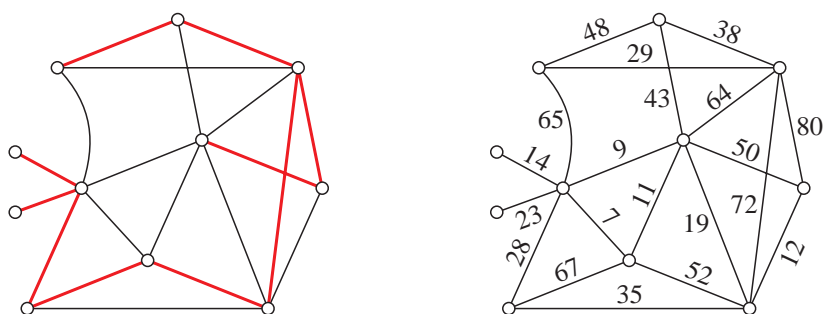


Abb. 11: Grundbegriffe der Graphentheorie: Baum (links), bewerteter Graph (rechts).

Ein *Baum* ist ein zusammenhängender Graph ohne Kreis; dann ist die Anzahl der Knoten um genau 1 größer als jene der Kanten. Der in Abb. 11, links, gezeigte Baum ist sogar ein *aufspannender Baum*, denn er erreicht alle Knoten des gegebenen Graphen.

Ist jeder Kante eines Graphen ein Wert zugeordnet, so spricht man von einem *bewerteten Graphen* oder einem *Netzwerk* (Abb. 11, rechts). Ein zwei Knoten  $K_0$  und  $K_i$  verbindender Weg mit kleinster Wertesumme heißt *Minimalweg* zwischen  $K_0$  und  $K_i$  und dessen Wertesumme auch *Distanz*  $d(K_0, K_i)$  oder einfach *Länge*. Offensichtlich erwarten wir von einem Navigationssystem, dass es dem Nutzer einen Minimalweg



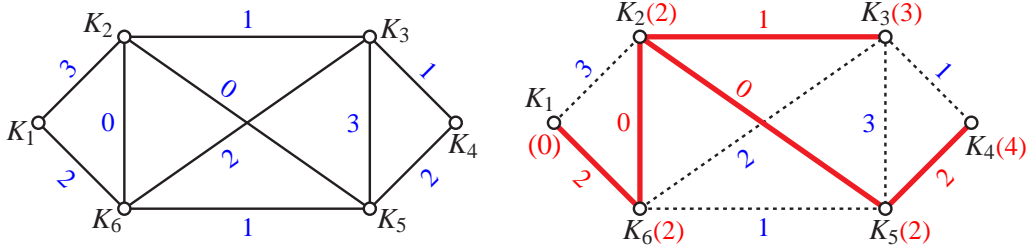


Abb. 12: Links: bewerteter Graph, rechts: ein Entfernungsbaum zum Knoten  $K_1$ .

anzeigt. Für dessen Bestimmung wurden schon lange vor der Zeit der Satellitennavigation Algorithmen entwickelt. Wir erklären einen davon an Hand eines einfachen Beispiels (siehe Abbn. 12–14).

**Algorithmus von Edsger W. Dijkstra (1959):**

Gegeben: Bewerteter Graph mit nichtnegativen Bewertungen<sup>8</sup> (siehe Abb. 12, links).

Gesucht: Ein Minimalweg von  $K_1$  bis  $K_4$ , d.h., ein Weg mit kleinster Wertesumme (vgl. Abb. 12, rechts; die jeweiligen Distanzen  $d(K_1, K_i)$  stehen neben  $K_i$  in Klammern).

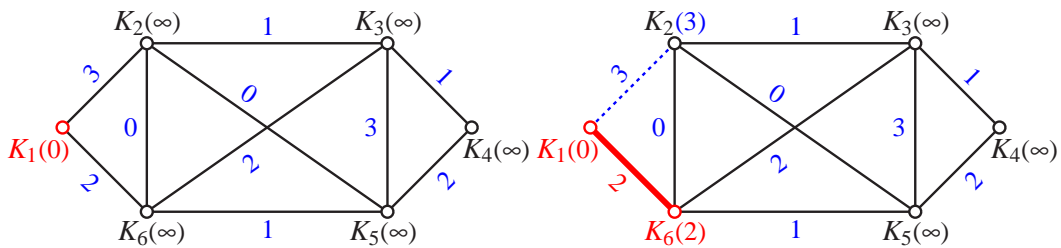


Abb. 13: Algorithmus von Dijkstra, Initialisierung (links) und erster Schritt (rechts).

Als Initialisierung bekommt jeder Knoten  $K_i$  einen Wert  $v_i$  zugeordnet, wobei  $v_1 = 0$  ist und für alle anderen Knoten  $v_i = \infty$ . Bestimmt wird ein Teilgraph  $\mathcal{T}$ , der am Ende den Minimalweg enthält.

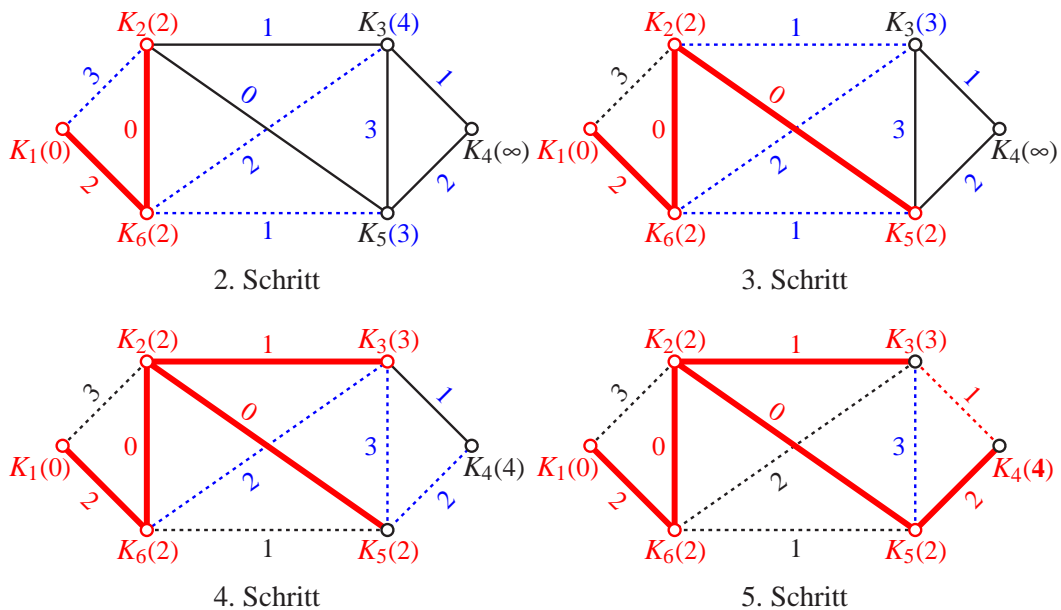


Abb. 14: Algorithmus von Dijkstra, die restlichen Schritte.

<sup>8</sup> Es gibt viele weitere Algorithmen, etwa jenen von Moore (siehe Moore (1959)), der manchmal auch Algorithmus von Bellman-Ford genannt wird. Dieser funktioniert auch bei negativen Bewertungen, ist aber langsamer als jener von Dijkstra.

Im ersten Schritt korrigieren wir bei allen Nachbarn  $K_j$  von  $K_1$  deren Wert  $v_j$  auf die Länge der Verbindungskante mit  $K_1$ . Eine Kante minimaler Länge samt ihren Endpunkten kommt zu  $\mathcal{T}$ .

Im zweiten Schritt wird bei allen Nachbarn  $K_j$  der in  $\mathcal{T}$  enthaltenen Knoten  $K_i$  der Wert  $v_j$  auf die Summe aus  $v_i$  und der Distanz  $d(K_i, K_j)$  korrigiert, sofern diese Summe kleiner ist als das bisherige  $v_j$ . Ein  $K_j$  mit minimalem  $v_j$  kommt zu  $\mathcal{T}$  dazu samt der Kante  $K_i K_j$ .

Das wiederholt sich gleichlautend bei allen folgenden Schritten, und zwar solange, bis der Zielknoten  $K_4$  erreicht ist. Dabei gibt es bei dem in den Abbildungen 13 und 14 gezeigten Beispiel im letzten Schritt zwei Möglichkeiten für die auszuwählende Kante, nämlich  $K_3 K_4$  oder  $K_5 K_4$ . Es gilt der folgende

**Satz 2** Für jeden Knoten  $K_i \in \mathcal{T}$  ist der in dem Baum  $\mathcal{T}$  enthaltene Weg von  $K_1$  nach  $K_i$  ein Minimalweg, und der Wert  $v_i$  gibt dessen Länge an.

**Beweis:** Angenommen, an Wegen von  $K_1$  nach  $K_i$  gibt es neben jenem aus  $\mathcal{T}$  über  $K_{i-1}$  noch einen kürzeren Weg  $\mathcal{H}$ . Dieser verlaufe bis  $K_r$  ( $r \geq 1$ ) in  $\mathcal{T}$ , und  $K_s$  sei der erste Knoten außerhalb von  $\mathcal{T}$ . Dann wäre die Länge von  $\mathcal{H}$  gleich der Summe aus dem Wert  $v_s$  von  $K_s$ , wobei  $v_s \geq v_i$  ist nach dem Entscheidungskriterium für  $K_i$ , und der nicht-negativen Länge des Weges von  $K_s$  nach  $K_i$ , also insgesamt  $\geq v_i$ . Widerspruch!

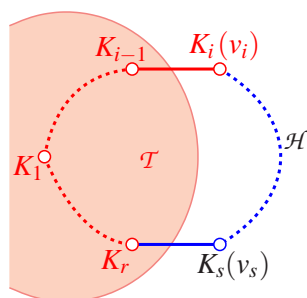


Abb. 15: Für jeden Knoten  $K_i \in \mathcal{T}$  ist der im Baum  $\mathcal{T}$  enthaltene Weg von  $K_1$  nach  $K_i$  ein Minimalweg.

Wird der Algorithmus fortgesetzt, bis alle Knoten erreicht sind, so entsteht ein *Entfernungsbaum*  $\mathcal{T}$  zum Knoten  $K_1$ , also ein aufspannender Baum, wobei für jedes  $i$  der Wert  $v_i$  des Knotens  $K_i$  die Länge des Minimalweges von  $K_1$  und  $K_i$  angibt (Abb. 12, rechts).

## Literatur

- Arens, T.; Busam, R.; Hettlich, F.; Karpfinger, Ch.; Stachel, H. (2013): *Grundwissen Mathematikstudium — Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Dijkstra, E. W. (1959): A Note on Two Problems in Connexion with Graphs. *Numer. Math.* 1, 269–271.
- Dodel, H.; Häupler, D. (2010): *Satellitenavigation*. 2. korr. u. erw. Aufl., Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.
- Glaeser, G. (2015): Briefe der Geometrie an die Mathematik. *Informationsblätter der Geometrie (IBDG)* 34, S. 25–38.
- Glaeser, G.; Stachel, H.; Odehnal, B. (2016): *The Universe of Conics*. Heidelberg: Springer Spektrum.
- Izumi, Sh. (2016): Sufficiency of simplex inequalities. *Proc. Amer. Math. Soc.* 144, no. 3, 1299–1307.
- Moore, E. F. (1959): The shortest path through a maze. *Proc. Internat. Symposium on the Theory of Switching, Cambridge/MA 1957*. Cambridge: Harvard University Press, S. 285–292.
- Schoenflies, A. (1925): *Einführung in die Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes*. Berlin: Verlag von Julius Springer.
- Schüttler, T. (2014): *Satellitenavigation*. Berlin Heidelberg: Springer Vieweg.
- Sobel, D. (2003): *Längengrad*. Berliner Taschenbuch Verlag (Englisches Original (1995): *Longitude*. Walker & Comp.)
- Staudé, O. J. (1915): Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven. In *Encyklopädie der math. Wiss.* III.2.1, Nr. C2, Leipzig: B.G. Teubner, S. 161–256.